ARTICULO ORIGINAL
Rev. Punkuri 1(1), 2021; 49 - 62

Recibido: **Junio 2021** **Aceptado:** **Agosto 2021**

ESTABILIDAD DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE TIMOSHENKO CON MEMORIA

SOLUTION STABILITY OF A TIMOSHENKO SYSTEM WITH MEMORY

Víctor Hilario Tarazona Miranda[1, 2]

[1]Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.
[2]Universidad Nacional del Santa

Correspondencia:
Mag. Víctor Hilario Tarazona Miranda
vtarazonam@unmsm.edu.pe
2018825021@uns.edu.pe

RESUMEN

En el presente artículo se analiza el comportamiento asintótico de sistemas disipativos con aplicaciones a modelados de vigas, lo cual estudia, específicamente, la existencia, unicidad y el comportamiento asintótico de un sistema de Timoshenko con memoria y con condición frontera de tipo Dirichlet. Asimismo, para demostrar la existencia¸ unicidad de solución y la estabilidad exponencial se emplea la teoría de semigrupos de operadores lineales. De la misma manera, en el presente trabajo, se demuestra la existencia y unicidad de solución usando el Corolario Liu y la estabilidad exponencial del semigrupos asociado al sistema disipativos, usando el Teorema de Gearhart.
Palabras clave: semigrupo, estabilidad exponencial, memoria, sistema de Timoshenko, ecuaciones en derivadas parciales.

ABSTRACT

This article studies the asymptotic behavior of dissipative systems with applications to beam modeling. Specifically, the existence, uniqueness and asymptotic behavior of a Timoshenko system with memory and with a Dirichlet type boundary condition are studied. The theory of semigroups is used to demonstrate the result of existence and uniqueness of solution and Gearhart theorem for the exponential stability of a Timoshenko system with total memory.
Key words: semigroups, exponential stability, memory, Timoshenko system, partial derivative equations.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, importantes mecanismos disipativos fueron utilizados para estabilizar estructuras modernas en ingeniería cuando son sometidas a oscilaciones no deseables, estas oscilaciones son modeladas por ecuaciones diferenciales parciales que evoluciona con el tiempo.

Se han realizado estudios con la presencia de términos disipativos tanto en el ángulo de rotación como en el desplazamiento transversal, los estudios muestran que el sistema de Timoshenko se estabiliza para cualquier solución débil y sin ninguna restricción en las constantes del sistema dado.

El estudio realizado por Greatti (2018), para el sistema de Timoshenko termoelástico y viscoelástico demuestra la existencia y unicidad usando la teoría de semigrupos, dándole condiciones al núcleo y para demostrar la estabilidad exponencial usa el teorema de Pruss para el caso termoelástico y para el caso viscoelástico emplea el método de la energía. Zhiyong Ma *et al.* (2011), en el estudio de un sistema de Timoshenko con historia, demuestran el resultado de estabilidad exponencial con suposiciones sobre la función de relajación del historial pasado *g* decayendo exponencialmente para el caso de velocidad de ondas iguales. Raposo *et al.* (2005), en el estudio del sistema de Timoshenko con dos amortiguaciones débiles, la existencia y unicidad de soluciones fuertes lo demuestran por la teoría de semigrupos y para probar el decaimiento exponencial utilizan un argumento de contradicción al combinar el teorema de Gearhart con una técnica de EDP. Tarazona (2018), estudia la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada, usando el teorema de Pruss obtiene la existencia y unicidad de soluciones del sistema; asimismo, analiza que la disipación dada por el término historia es lo suficientemente fuerte para producir estabilidad exponencial, para el caso de la velocidad de las ondas iguales y en el caso, de la velocidad de las ondas no sean iguales, se evidencia que la energía de primer orden decae polinomialmente.

En la presente investigación, se realiza el estudio del sistema lineal de Timoshenko con memoria total, cuyo modelo es dado por:

$$\rho_1\varphi_{tt}-k\left(\varphi_x+\psi\right)_x-b\varphi_{xx}+\int_0^{+\infty}g_1(s)\varphi_{xx}(x,t-s)ds=0,en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \tag{1}$$

$$\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+\int_0^{+\infty}g_2\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)ds+k\left(\varphi_x+\psi\right)=0,en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \tag{2}$$

con condiciones iniciales,

$$\varphi\left(x,0\right)=\varphi_0\left(x\right),\varphi_t\left(x,0\right)=\varphi_1\left(x\right),\psi\left(x,0\right)=\psi_0\left(x\right),\psi_t\left(x,0\right)=\psi_1\left(x\right),x\in\left(0,L\right) \tag{3}$$

y con condiciones frontera,

$$\varphi\left(0,t\right)=\varphi\left(L,t\right)=\psi\left(0,t\right)=\psi\left(L,t\right)=0;t\geq 0 \tag{4}$$

donde ρ_1, ρ_2, b,k son constantes positivas, las funciones φ y ψ son respectivamente el desplazamiento transversal de una viga y el ángulo de rotación y la función $g_i:[0,\infty[\to\tilde{}\,,\ i=1,2,$ es el núcleo de difracción, la cual tiene las siguientes hipótesis:

$$g_i(t)>0,\quad t\geq 0;\quad \tilde{b}_i=(b-\int_0^{\infty}g_i(s)ds)>0$$ y existen constantes positivas k_0,k_1,k_2

$$\text{tal que: } -k_0g_i(t)\leq g_i'(t)\leq -k_1g_i(t);\ \left|g_i''(t)\right|\leq k_2g_i(t),\ t\geq 0$$

MATERIALES Y METODOS

Se utilizó el método científico (cuantitativo), el alcance de la investigación es para el desarrollo de la alta ingeniería, pues se utilizan mecanismos disipativos para estabilizar estructuras modernas cuando son sometidas a oscilaciones no deseables.
La investigación es de nivel analítico, pues se demostrará los resultados usando la teoría de semigrupos. Además, se empleó el diseño no experimental debido a la naturaleza de la investigación.

La población es el sistema de Timoshenko y la muestra considerándose una parte representativa de la población en la presente investigación es el sistema de Timoshenko con memoria (1) – (4). La técnica usada es el análisis documental, es decir se recolecta información de revistas, artículos, libros sobre el sistema de Timoshenko dado por las ecuaciones (1) – (4). Los instrumentos son las fichas de contenido y fichas bibliográficas. Empleando resultados del análisis funcional, de los espacios L^P, de los espacios de Sobolev y de la teoría de semigrupos, encontramos la existencia y unicidad de solución por medio del corolario de Liu y la estabilidad exponencial mediante el teorema de Gearhart.

Se establecerán resultados de la buena colocación y estabilidad asintótica para el sistema bajo ciertas condiciones impuestas en la función relajación, independientemente de las velocidades de propagación de las ondas.

RESULTADOS

En este trabajo se considera el problema para el siguiente sistema de Timoshenko con memoria total:

$$\rho_1\varphi_{tt} - k\left(\varphi_x + \psi\right)_x - b\varphi_{xx} + \int_0^{+\infty} g_1(s)\varphi_{xx}(x,t-s)ds = 0, en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \tag{1.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^{+\infty} g_2\left(s\right)\psi_{xx}\left(x,t-s\right)ds + k\left(\varphi_x + \psi\right) = 0, en\left(0,L\right)\times\left(0,+\infty\right) \tag{1.2}$$

con condiciones iniciales,

$$\varphi\left(x,0\right) = \varphi_0\left(x\right), \varphi_t\left(x,0\right) = \varphi_1\left(x\right), \psi\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right), \psi_t\left(x,0\right) = \psi_1\left(x\right), x\in\left(0,L\right) \tag{1.3}$$

y condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$\varphi\left(0,t\right) = \varphi\left(L,t\right) = \psi\left(0,t\right) = \psi\left(L,t\right) = 0; t\geq 0 \tag{1.4}$$

donde ρ_1, ρ_2, k y b son constantes positivas.

Nuestro interés principal es analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de dicho sistema, usaremos para tal efecto los resultados de Gearhart. Para resolver este problema, hacemos modificaciones en el sistema (1.1) – (1.4), introducimos el siguiente cambio según la idea de Dafermos:

$$\eta_1^t(x,s) := \varphi(x,t) - \varphi(x,t-s) \tag{1.5}$$

$$\eta_2^t\left(x,s\right) := \psi\left(x,t\right) - \psi\left(x,t-s\right) \tag{1.6}$$

Luego, el sistema inicial (1.1) – (1.4) es reescrito como:

$$\rho_1\varphi_{tt} - \tilde{b}_1\varphi_{xx} - \int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}(x,s)ds - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \tag{1.7}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - \tilde{b}_2\psi_{xx} - \int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0 \tag{1.8}$$

$$\eta_{1t} + \eta_{1s} - \varphi_t = 0 \tag{1.9}$$

$$\eta_{2t} + \eta_{2s} - \psi_t = 0 \tag{1.10}$$

las condiciones iniciales son dadas por

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \psi(x,0) = \psi_0(x), \psi_t(x,0) = \psi_1(x), x \in (0,L)$$

$$\eta_{1,0}(x,s) = \varphi_0(x,0) - \varphi_0(x,-s), \quad \eta_{2,0} = \psi_0(x,0) - \psi_0(x,-s) \ \text{ en } \ (0,L)\times(0,\infty)$$

y con condiciones de frontera

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \eta_i^t(0,s) = \eta_i^t(L,s) = 0; s,t \geq 0, \ i = 1,2$$

La función g_i:0,+∞)→R, ***i=1,2***, es conocida como núcleo de difracción y tiene las siguientes hipótesis:

$$g_i(t) > 0, \exists k_0, k_1, k_2 > 0: \ -k_0 g_i(t) \leq g_i'(t) \leq -k_1 g_i(t), \ |g_i''(t)| \leq k_2 g_i(t), \forall t \geq 0$$

$$\tilde{b}_i := \left(b - \int_0^{+\infty} g_i(s)ds \right) > 0, \quad i = 1,2$$

Se define L_g^2 (R^+, H_0^1 $(0,L)$)como el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrable con valores en H_0^1 $(0,L)$ provisto del producto interno

$$\left\langle \zeta^1; \zeta^2 \right\rangle_{L_g^2} = \int_0^L \int_0^\infty g(s)\zeta_x^1(s)\overline{\zeta_x^2}(s)dsdx \ \text{ y la norma } \ \|\zeta\|_{L_g^2} = \left(\int_0^L \int_0^\infty g(s)|\zeta_x(s)|^2 dsdx \right)^{1/2}$$

Existencia y Unicidad

En esta parte se expresa el sistema (1.7) – (1.10) con condiciones iniciales y de frontera dados, como un problema abstracto de Cauchy con el fin de demostrar que existe una única solución, empleando la teoría de semigrupos. Para ello, primero se determina la existencia del semigrupo asociado al sistema dado y, finalmente, que el operador definido es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0. En primer lugar, hallamos la energía relacionada al sistema (1.7) - (1.10) con condiciones iniciales y de frontera dados, expresado por:

$$E(t):=\frac{1}{2}\left\{\rho_1\int_0^L|\varphi_t|^2\,dx+\rho_2\int_0^L|\psi_t|^2\,dx+\tilde{b}_1\int_0^L|\varphi_x|^2\,dx+\tilde{b}_2\int_0^L|\psi_x|^2\,dx+k\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2\,dx\right.$$
$$\left.+\int_0^L\int_0^{+\infty}g_1(s)\left|\eta_{1x}^t(x,s)\right|^2\,dsdx+\int_0^L\int_0^{+\infty}g_2(s)\left|\eta_{2x}^t(x,s)\right|^2\,dsdx\right\} \qquad (1.14)$$

y

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\int_0^L\int_0^{+\infty}g_1(s)\eta_{1x}^t(x,s)\eta_{1sx}^t(x,s)dsdx-\int_0^L\int_0^{+\infty}g_2(s)\eta_{2x}^t(x,s)\eta_{2sx}^t(x,s)dsdx \qquad (1.15)$$

Así de (1.14) y (1.15) se obtiene, $\dfrac{d}{dt}E(t)\leq 0$, para todo ≥ 0 (1.16)

Reescribimos el sistema (1.7) – (1.10) como una ecuación de evolución, tomando

$$U=(\varphi,\varphi_t,\psi,\psi_t,\eta_1^t,\eta_2^t)^T,$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{dU(t)}{dt}=AU(t)\\ U(0)=U_0\end{array}\right.$$

donde $U_0=(\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1,\eta_{1,0},\eta_{2,0})$,*y* $A:D(A)\subset \mathrm{H}\to\mathrm{H}$ *es el operador diferencial dado por,*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0\\ (\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1}+\frac{k}{\rho_1})\partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty}g_1(s)\partial_x^2 ds & 0\\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0\\ \frac{-k}{\rho_2}\partial_x & 0 & -\frac{k}{\rho_2}I+\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\partial_x^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty}g_2(s)\partial_x^2 ds\\ 0 & I & 0 & 0 & -\partial_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\partial_s \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

y de (1.14), definimos el espacio de Hilbert H, dado por:

$$H=H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L_{g_1}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))\times$$
$$L_{g_2}^2(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))$$

y se define la norma en el espacio de fase H por

$$\|U\|_{\mathrm{H}}^2 = \rho_1\|u_2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|u_4\|_{L^2}^2 + \tilde{b}_1\|u_{1x}\|_{L^2}^2 + \tilde{b}_2\|u_{3x}\|_{L^2}^2 + k\|u_{1x}+u_3\|_{L^2}^2 + \|u_5\|_{L^2_{g_1}}^2 + \|u_6\|_{L^2_{g_2}}^2$$

El dominio del operador A es definido por

$$D(A) = \Big\{ U \in H : u, v \in H_0^1(0,L); (\frac{\tilde{b}_1}{\rho_1} + \frac{k}{\rho_1})\varphi_{xx} + \frac{1}{\rho_1}\int_0^{+\infty} g_1(s)\eta_{1xx}^t(x,s)ds \in L^2(0,L)$$

$$\frac{\tilde{b}_2}{\rho_2}\psi_{xx} + \frac{1}{\rho_2}\int_0^{+\infty} g_2(s)\eta_{2xx}^t(x,s)ds \in L^2(0,L); \eta_{is}^t \in L_{g_i}^2; \eta_i^t(x,0) = 0; i = 1,2 \Big\}$$

A continuación, se demuestra que el operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones.

Teorema 3.1
El operador A dado en (1.17) es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0

Demostración:
En efecto, A es disipativo, pues para $U = \left(\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta_1^t, \eta_2^t\right)^t \in D(A)$ tenemos,

$$\operatorname{Re}\langle AU;U\rangle_H = \frac{1}{2}\int_0^\infty g_1'(s)\|\eta_{1x}^t\|_{L^2}^2\, ds + \frac{1}{2}\int_0^\infty g_2'(s)\|\eta_{2x}^t\|_{L^2}^2\, ds \tag{1.18}$$

$$\leq -\frac{1}{2}k_1\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)|\eta_{1x}^t|^2\, dsdx - \frac{1}{2}k_1\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)|\eta_{2x}^t|^2\, dsdx \leq 0$$

También se verifica que $0 \in p(A)$ y $D(A)$ es denso en H. Por lo tanto, por el Corolario de Liu, se sigue que el operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.

Teorema 3.2
Sea $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0) \in D(A)$ y A es un generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0. Entonces existe una única solución del problema de Cauchy, $U(t)=S_A(t)U_0$, satisfaciendo $U \in C(R^+;D(A))\cap C^1(R^+;H)$.

Demostración:
En efecto, por el teorema 3.1, A genera un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de contracciones de clase C_0 sobre H. Entonces por el Teorema de existencia y unicidad la aplicación $U:[0,+\infty) \to H$ tal que $U(t) = S(t)U_0$ es la única solución del problema de valor

$$\text{inicial}\ \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = AU(t), t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

con la condición $U \in C\left([0,+\infty);H\right)$.

Luego como $U_0 \in D(A)$ se obtiene $U \in C\left([0,+\infty);D(A)\right)\cap C^1\left([0,+\infty);H\right)$.

Estabilidad Exponencial
El objetivo de esta sección está relacionado con los resultados que establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un semigrupo de clase C_0 sea exponencialmente estable. Para el decaimiento exponencial se utilizó el teorema de Gearhart.

Teorema 3.3
El semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 generado por A es exponencialmente estable.

Demostración:
Para demostrar la estabilidad exponencial de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se deben verificar las condiciones (i) y (ii) del Teorema de Gearhart.

Primero se demuestra que: $iR \subset \rho(A)$
En efecto, supongamos que $iR \subset \rho(A)$ no es verdadero. Entonces existen $(\beta_n)_{n\in N}$

$(U_n)_{n\in}$ y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de $\mathbb{R}$, $D(A)$ y H respectivamente, tal

que, $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} \omega \in \mathbb{R}$, con $|\beta_n| < |\omega|$; $\|U_n\|_H = 1$ y $F_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

siendo

$$(i\beta_n I - A)U_n = F_n, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.19}$$

Tomando $U_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3, u_n^4, u_n^5, u_n^6) \in D(A)$ y $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6) \in H$ en

(1.19) tenemos,

$$i\beta_n u_n^1 - u_n^2 = f_n^1 \tag{1.20}$$

$$i\beta_n \rho_1 u_n^2 - k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right)_x - \tilde{b}_1 u_{nxx}^1 - \int_0^{+\infty} g_1(s) u_{nxx}^5(x,s)\,ds = \rho_1 f_n^2 \tag{1.21}$$

$$i\beta_n u_n^3 - u_n^4 = f_n^3 \tag{1.22}$$

$$i\beta_n \rho_2 u_n^4 - \tilde{b}_2 u_{nxx}^3 - \int_0^{\infty} g_2(s) u_{nxx}^6\,ds + k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right) = \rho_2 f_n^4 \tag{1.23}$$

$$i\beta_n u_n^5 - u_n^2 + u_{ns}^5 = f_n^5 \tag{1.24}$$

$$i\beta_n u_n^6 - u_n^4 + u_{ns}^6 = f_n^6 \tag{1.25}$$

Haciendo producto interno con U_n en (1.19) y tomando la parte real tenemos:

$$\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx + \frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 dsdx \leq \left|\langle F_n, U_n\rangle_H\right|, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $F_n \to 0$ en y $(U_n)_{n\in N}$ es acotada, resulta luego que $\langle F_n, U_n\rangle_H \to 0$.

Luego, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx+\lim_{n\to\infty}\int_0^L\int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 ds=0,$$

es decir, $\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g1}}\to 0$ y $\left\|u_n^6\right\|_{L^2_{g2}}\to 0$

Así, obtenemos

$$u_n^5\to 0 \text{ en } L^2_{g_1}\left(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)\right) \text{ y } u_n^6\to 0 \text{ en } L^2_{g_2}(\mathbb{R}^+,H_0^1(0,L)). \tag{1.26}$$

Así, obtenemos

$$i\beta_n u_n^5+u_{ns}^5-u_n^2=f_n^5\in L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+;H_0^1(0,L))\hookrightarrow L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+;L^2(0,L)) \tag{1.27}$$

Luego en (1.27) derivando la expresión con respecto a x, multiplicando por $\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2 dsdx$ y usando la desigualdad de Holder tenemos,

$$b_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2\le|\beta_n|\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right)ds+\left|\int_0^\infty g_1(s)\left(\int_0^L u_{nx}^2u_{nsx}^5dx\right)ds\right|$$

$$+\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|f_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right) \tag{1.28}$$

Estimando cada término del lado derecho de la expresión (1.28) tenemos:

$$|\beta_n|\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right)ds\le C_1\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g1}}^2|\beta_n|^2+\frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \tag{1.29}$$

$$\left|\int_0^\infty g_1(s)\left(\int_0^L u_{nx}^2u_{nsx}^5dx\right)ds\right|\le\frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2+C_2\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g1}}^2 \tag{1.30}$$

$$\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|f_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right)ds\le\frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2+C_3\left\|f_n^5\right\|_{L^2_{g1}}^2 \tag{1.31}$$

Ahora reemplazando (1.29), (1.30) y (1.31) en (1.28), tenemos:

$$b_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 + C_1\left\|u_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2 + \frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 + C_2\left\|u_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2 + \frac{b_0}{6}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 + C_3\left\|f_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2$$

$$\leq \frac{b_0}{2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 + C_4\left\|u_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2 + C_4\left\|f_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2$$

De la expresión anterior obtenemos,

$$\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \leq C\left\|u_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2 + C\left\|f_n^5\right\|_{L_{g1}^2}^2 \tag{1.32}$$

Como $F_n \to 0$ y $\left\|u_n^5\right\|_{L_{g1}^2} \to 0$ obtenemos $\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2} \to 0$

Luego por la equivalencia de normas se tiene

$$\left\|u_n^2\right\|_{H_0^1} \to 0, \text{ es decir, } u_n^2 \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L). \tag{1.33}$$

Procediendo de manera similar que en (1.33), obtenemos

$$\left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2}^2 \leq C\left\|u_n^6\right\|_{L_{g1}^2}^2 + C\left\|f_n^6\right\|_{L_{g2}^2}^2$$

Como $F_n \to 0$ y $\left\|u_n^6\right\|_{L_{g2}^2} \to 0$ obtenemos $\left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2} \to 0$

Luego por la equivalencia de normas se tiene,

$$\left\|u_n^4\right\|_{H_0^1} \to 0, \text{ es decir, } u_n^4 \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L). \tag{1.34}$$

Haciendo $n \to \infty$, en (1.22), obtenemos $i\beta_n u_{nx}^3 - u_{nx}^4 = f_{nx}^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.

Luego tenemos,

$$\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \left\|i\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \left\|u_{nx}^4 + f_{nx}^3\right\|_{L^2} < \left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2} + \left\|f_{nx}^3\right\|_{L^2}$$

Así por (1.34) y la expresión anterior obtenemos

$$\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2(0,L)$$

Como $|\beta_n| < |\omega|$, en la expresión anterior se tiene,

$$\left\|u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \frac{1}{|\beta_n|}\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto, $u^3_{nx} \to 0$ en $L^2(0,L)$. (1.35)

En (1.20) de (1.33), cómo
$|\beta_n| < |\omega|$ y $F_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ en H se tiene $u_n^1 \to 0$ en $H_0^1(0,L)$.
Luego por equivalencias de normas obtenemos,

$$u_{nx}^1 \to 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{1.36}$$

De (1.35) y por Poincare se tiene: $u^3_n \to 0$ en $L^2(0,L)$. (1.37)

Sumando (1.37) con (1.36), obtenemos

$$u_{nx}^1 + u_n^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L). \tag{1.38}$$

De (1.26), (1.33), (1.34), (1.35), (1.36) y (1.38) se tiene que $\|U_n\|_H \underset{n\to\infty}{\to} 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\|U_n\|_H=1, \forall n \in N$.

Por lo tanto, $iR \subset \rho(A)$.

A continuación, se prueba que $\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - A)^{-1}\right\|_{L(H)} < \infty$

En efecto, supongamos que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \left\|(i\lambda I - A)^{-1}\right\|_{L(H)} = \infty$$

Luego, existe una sucesión de números reales $(\beta_n)_{n\in N}$ con $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ y una sucesión de funciones vectoriales $(F_n)_{n\in N} \in H$ tal que

$$\left\|(i\beta_n I - A)^{-1} F_n\right\|_H \geq n\|F_n\|_H, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.39}$$

Como, $i\beta_n \in \rho(A)$, luego existe una única sucesión $(U_n)_{n\in N} \in D(A)$, con

$$\|U_n\|_H = 1 \text{ tal que } \quad (i\beta_n I - A)U_n = F_n \tag{1.40}$$

De (1.37) se tiene,

$$1 = \|U_n\|_H = \left\|(i\beta_n I - A)^{-1} F_n\right\|_H \geq n\|F_n\|_H, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde obtenemos, $\|F_n\|_H \leq \dfrac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Así, cuando $n \to \infty$, se tiene $\|F_n\|_H \to 0$ en H, de donde resulta que:

$$F_n \to 0 \text{ en } H \; .$$

Reemplazando en (1.40) se tiene,

$$(i\beta_n I - A)U_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } H \tag{1.41}$$

Tomando $U_n = \left(u_n^1, u_n^2, u_n^3, u_n^4, u_n^5, u_n^6\right)^T \in D(A)$ y $F_n = \left(F_n^1, F_n^2, F_n^3, F_n^4, F_n^5, F_n^6\right)^T \in H$ reemplazando en (1.41) obtenemos,

$$i\beta_n u_n^1 - u_n^2 = F_n^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{en } H_0^1(0,L) \tag{1.42}$$

$$i\beta_n u_n^2 - \tilde{b}_1 u_{nxx}^1 - \int_0^\infty g_1(s) u_{nxx}^5(x,s)ds - k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right)_x = \rho_1 F_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{1.43}$$

$$i\beta_n u_n^3 - u_n^4 = F_n^3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{en } H_0^1(0,L) \tag{1.44}$$

$$i\beta_n u_n^4 - \tilde{b}_2 u_{nxx}^3 - \int_0^\infty g_2(s) u_{nxx}^6(x,s)ds - k\left(u_{nx}^1 + u_n^3\right) = \rho_2 F_n^4 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2(0,L) \tag{1.45}$$

$$i\beta_n u_n^5 + u_{ns}^5 - u_n^2 = F_n^5 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \tag{1.46}$$

$$i\beta_n u_n^6 + u_{ns}^6 - u_n^4 = F_n^6 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2_{g_2}(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \tag{1.47}$$

Tomando producto interno en H de $(i\beta_n I \text{ -} A)U_n$
con U_n, tenemos

$$i\beta_n \|U_n\|_H^2 - \langle AU_n, U_n\rangle_H = \langle F_n, U_n\rangle_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.48}$$

Tomando la parte real en (1.48) tenemos,

$$\frac{1}{2}k_1 \int_0^L \int_0^\infty g_1(s)\left|u_{nx}^5\right|^2 dsdx + \frac{1}{2}k_1 \int_0^L \int_0^\infty g_2(s)\left|u_{nx}^6\right|^2 dsdx = \mathrm{Re}\langle F_n, U_n\rangle_H \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

de la expresión anterior resulta

$$\|u_n^5\|_{L^2_{g1}} \to 0 \text{ y } \|u_n^6\|_{L^2_{g2}} \to 0$$

Así se obtiene

$$u_n^5 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2_{g_1}(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \text{ y } u_n^6 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ en } L^2_{g_2}(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L)) \tag{1.49}$$

Puesto que $L^2_{g_1}(R^+;H_0^1(0,L)) \hookrightarrow L^2_{g_1}(R^+;L^2(0,L))$, luego en (1.46) derivamos con respecto a x y multiplicando por $\int_0^L\int_0^\infty g_1(s)u_{nx}^2 dsdx$

y usando la desigualdad de Holder se tiene,

$$b_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \le |\beta_n|\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|u_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right)ds + \left|\int_0^\infty g_1(s)\left(\int_0^L u_{nx}^2 u_{nsx}^5 dx\right)ds\right|$$

$$+\int_0^\infty g_1(s)\left(\left\|F_{nx}^5\right\|_{L^2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}\right) \tag{1.50}$$

Estimando cada término del lado derecho de la expresión (1.50) tenemos,

$$b_0\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \le \frac{b_0}{2}\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 + C_4\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g_1}}^2 + C_4\left\|F_n^5\right\|_{L^2_{g_1}}^2$$

De la expresión anterior obtenemos,

$$\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2}^2 \le C\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g_1}}^2 + C\left\|F_n^5\right\|_{L^2_{g_1}}^2 \tag{1.51}$$

Como $F_n \to 0$ y por (1.49) $\left\|u_n^5\right\|_{L^2_{g_1}} \to 0$ obtenemos $\left\|u_{nx}^2\right\|_{L^2} \to 0$

Luego por la equivalencia de normas se tiene,

$$\left\|u_n^2\right\|_{H_0^1} \to 0, \text{ es decir, } u_n^2 \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L). \tag{1.52}$$

En (1.47) procediendo de manera similar que, en (1.52), obtenemos

$$\left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2}^2 \le C\left\|u_n^6\right\|_{L^2_{g_1}}^2 + C\left\|F_n^6\right\|_{L^2_{g_2}}^2$$

Como $F_n \to 0$ y por (1.49) $\left\|u_n^6\right\|_{L^2_{g_2}} \to 0$ obtenemos $\left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2} \to 0$

Luego por la equivalencia de normas se tiene,

$$\left\|u_n^4\right\|_{H_0^1} \to 0, \text{ es decir, } u_n^4 \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L). \tag{1.53}$$

Como $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$, en (1.44) obtenemos,

$$i\beta_n u_{nx}^3 - u_{nx}^4 = F_{nx}^3 \to 0 \text{ en } L^2(0,L).$$

Luego tenemos,

$$\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \left\|i\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} = \left\|u_{nx}^4 + F_{nx}^3\right\|_{L^2} < \left\|u_{nx}^4\right\|_{L^2} + \left\|F_{nx}^3\right\|_{L^2}$$

Así, por (1.53) y la expresión anterior obtenemos

$$\left\|\beta_n u_{nx}^3\right\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ en } L^2(0,L)$$

Luego de la expresión anterior se tiene,

$$\left\|u_{nx}^{3}\right\|_{L^2}=\frac{1}{|\beta_n|}\left\|\beta_n u_{nx}^{3}\right\|_{L^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

Por lo tanto, $u^3_{NX} \hookrightarrow 0^2$ en $L^2(0,L)$ (1.54)

En (1.42) derivando con respecto a x y por inmersión tenemos,

$$i\beta_n u_{nx}^{1}-u_{nx}^{2}=F_{nx}^{1}\underset{n\to\infty}{\to}0 \quad (1.55)$$

Luego se obtiene

$$\left\|\beta_n u_{nx}^{1}\right\|_{L^2}=\left\|u_{nx}^{2}+F_{nx}^{1}\right\|_{L^2}\leq\left\|u_{nx}^{2}\right\|_{L^2}+\left\|F_{nx}^{1}\right\|_{L^2}$$

De (1.55) y de (1.52) tenemos, $\left\|\beta_n u_{nx}^{1}\right\|_{L^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$

Como $\left\|u_{nx}^{1}\right\|_{L^2}=\frac{1}{|\beta_n|}\left\|\beta_n u_{nx}^{1}\right\|_{L^2}\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Por lo tanto, se obtiene, $u^1_{NX} \hookrightarrow 0$ en $L^2(0,L)$ (1.56)

De (1.54), por la desigualdad de Poincare y de (1.56) se tiene,

$u^1_{NX} + u^3_{NX} \hookrightarrow 0$ en $L^2(0,L)$. (1.57)

De (1.49), (1.52), (1.53), (1.54), (1.56) y (1.57) se tiene que $\|U_n\|_H \underset{n\to\infty}{\to} 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\|U_n\|_H=1, \forall n\in N$.

Por lo tanto, $\limsup_{|\lambda|\to\infty}\left\|(i\lambda I-A)^{-1}\right\|_{L(H)}<\infty$

DISCUSIÓN

En la presente investigación, se evidencia la existencia y unicidad con condiciones Dirichlet y la estabilidad exponencial, empleando la teoría de semigrupos, el corolario de Liu y el teorema de Gearhart, lo cual se corrobora con las investigaciones de Greatti (2018), Ma *et al.* (2011), Said & Rahalí (2011), Raposo *et al.* (2005) y Tarazona (2018). Los resultados de estos estudios demuestran la existencia y unicidad con condiciones de Dirichlet y Dirichlet Neumann, empleando la teoría de semigrupos, el teorema de Lummer Phillips, el teorema de Hille Yoshida y corolario de Liu. Asimismo, para demostrar la estabilidad exponencial, dichos trabajos han empleado el teorema de Pruss con velocidad de ondas iguales, método de la energía o técnica de los multiplicadores y el teorema de Gearhart.

CONCLUSIONES

Se emplea la teoría de semigrupos para demostrar la existencia y unicidad de soluciones para un sistema de Timoshenko con memoria presente en el desplazamiento transversal y en el ángulo de rotación, con condiciones de frontera Dirichlet.

De la misma manera, se utiliza propiedades del generador infinitesimal de un semigrupo relacionado al sistema, se evidencia que es exponencialmente estable si y solo si cumple las condiciones del teorema de Gearhart.

El principal aporte de esta investigación es instaurar una condición imprescindible y autosuficiente para asegurar la estabilidad exponencial.

Agradecimientos
Un agradecimiento especial a la Escuela de Posgrado de la Universidad Nacional del Santa y a mi familia por su apoyo incondicional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Greatti, S. (2018). *Existéncia de solução e estabilidade exponencial dos sistemas de Timoshenko viscoelástico e termoelástico.* [Tesis de Maestria]. Universidade Estadual de Londrina. Disponible en: http://www.uel.br/pos/pgmac/Dissertacoes/2018%20Suellen%20Aparecida%20Greatti%20Vieira.pdf

Liu, Z. & Zheng, S. (1999). *Semigroups associated with dissipative systems.* Chapman and Hall.

Ma, Z., Zhang, L., & Yang, X. (2011). Exponential stability for a Timoshenko type system with history. *Journal of Mathematical Analitical Applied,* 4(380), 295-309. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.078

Raposo, C., Ferreira, J., Lima, M. & Castro, N. (2005). Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings. *Applied Mathematics Letters. 18(5)*, 530-536. DOI 10.1016/j.aml.2004.03.017

Said-Hoauri, B. & Rahali, R. (2011). A stability result for a Timoshenko system with past history and a delay term in the internal feedback. *Dynamic Systems and Applications.* 20, 325-356. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/265179274_A_stability_result_for_a_Timoshenko_system_with_past_history_and_a_delay_term_in_the_internal_feedback

Tarazona, V. (2018). *Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria)* [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Disponible en: https://hdl.handle.net/20.500.12672/8435